Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA
D. Prelat - 2020

§6. SERIES DE POTENCIAS Y FUNCIONES ANALÍTICAS. FÓRMULA DE TAYLOR

En este parágrafo veremos una gran familia de ejemplos de funciones holomorfas: las definidas mediante series de potencias y que se llaman *analíticas*. Es una familia grande e importante, con tradición imperial. Tanto que - como veremos más adelante - va a terminar ocupando todo el territorio de las holomorfas.

Las series de potencias son un tipo muy especial de series de funciones, las series de funciones son un tipo muy especial de sucesiones de funciones y las sucesiones de funciones son un tipo muy especial de sucesiones… Creo que gran parte de la dificultad que sienten muchos alumnos para entender el concepto de serie de funciones es que nunca se les presentó el concepto general de sucesión. Y es realmente sencillo:

DEFINICIÓN 6.1: Dado un conjunto cualquiera $\mathbb{X}$, una *sucesión de elementos de* $\mathbb{X}$ es una función $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{X}$.

Tan sencillo como eso. La notación clásica y habitual es, para cada $n \in \mathbb{N}$, indicar α_n en lugar de $\alpha(n)$, y a la función $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{X}$ se la indica $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ...)$ por tradición histórica y analogía con la notación habitual para los elementos de los espacios $\Re^2, \Re^3, \Re^4, ...$ en la forma $(x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3, x_4), ...$ Los elementos del conjunto $\mathbb{X}$ pueden ser números, vectores, matrices, funciones, paraboloides, espacios vectoriales, proboscídeos, marsupiales o quelonios. Para seguir con este tema en general, ver el apéndice.

En el caso en que nos interesa, $\mathbb{X} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ es el conjunto de las funciones polinómicas $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. La notación $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ no es la más utilizada en este planeta, pero es más parecida a la que ustedes vieron en Álgebra II. En esa materia vieron que este conjunto, es un espacio vectorial complejo (de dimensión infinita) con las operaciones habituales de suma de funciones y producto de funciones por escalares complejos. Las series de potencias son sucesiones en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ de un tipo muy particular:

DEFINICIÓN 6.2: Dada una sucesión $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ de números complejos y un número complejo z_0, se define como serie de potencias de centro z_0 y coeficientes $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ a la sucesión $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio S_n está definido, para cada complejo *z*, de la siguiente manera:

$$S_n(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + c_n(z - z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$$

Cada uno de estos polinomios se denomina "suma parcial" de la serie $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$.
Cuando $c_0 = 0$ se puede indicar la serie $S = (S_n)_{n=1}^{\infty}$, iniciando las sumas parciales a partir de S_1, lo que es bastante habitual.

***Nota* 6.1:** La series de potencias se suelen indicar, como las series en general, con el símbolo de sumatoria: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ o bien mediante sumas y puntitos suspensivos: $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + ...$ Pocas notaciones en la historia de la matemática han resultado más peligrosas para el desprevenido, pues el mismo símbolo se utiliza para la serie misma y para su límite (o suma, como repasaremos a continuación). No pretendemos aquí cambiar siglos de tradición, y utilizaremos la notación tradicional y la correcta indistintamente, pero vale la advertencia: el alumno tiene que tener muy clara la definición de serie de potencias.

***Ejemplos* 6.1**:

(1) $1 + z + z^2 + z^3 + ...$: Se trata de la serie $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ donde $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ para cada natural *n* y cada complejo *z*. El centro es $z_0 = 0$ y los coeficientes son todos iguales a 1. Esta serie se denomina "geométrica" y se conoce desde hace varios milenios (para *z* entero o racional, obviamente). Será una de las primeras que estudiaremos.

(2) $1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + ...$: Se trata de la serie $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ donde $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k$ para cada natural *n* y cada complejo *z*. El centro es $z_0 = 0$ y los coeficientes son $c_n = \frac{1}{n!}$ para cada natural *n*. A esta altura usted debe reconocer esta serie. Se trata de la serie exponencial y es una de las más importantes en la historia de la humanidad.

(3) $-z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + ...$: Se trata de la serie $S = (S_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} z^k$ para cada natural $n \geq 1$ y cada complejo *z*. Aquí el centro es $z_0 = 0$ y los coeficientes son $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ para cada natural $n \geq 1$.

(4) $1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2^2}z^4+\frac{1}{2^3}z^6+....$: Se trata de la serie $S=(S_n)_{n=0}^{\infty}$ donde $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}z^{2k}$ para cada natural n y cada complejo z. Aquí el centro es z_0 = 0 y los coeficientes son $c_n=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ para cada n par y $c_n=0$ para cada n impar.

(5) $1+\frac{1}{2}(z-i)+\frac{1}{3}(z-i)^2+\frac{1}{4}(z-i)^3+....$ (una con centro distinto de 0): Se trata de la serie $S=(S_n)_{n=0}^{\infty}$ donde $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}(z-i)^k$ para cada natural n y cada complejo z. El centro es $z_0=i$ y los coeficientes son $c_n=\frac{1}{n+1}$ para cada natural n.

(6) $z+2^2z^2+3^3z^3+4^4z^4+....$: Se trata de la serie $S=(S_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}k^kz^k$ para cada natural n y cada complejo z. Aquí el centro es z_0 = 0 y los coeficientes son $c_n=n^n$ para cada natural n.

***Observación* 6.1**: No cualquier sucesión de polinomios es una serie de potencias. En una serie de potencias, para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $z\in\mathbb{C}$: $S_{n+1}(z)=S_n(z)+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}$. Por ejemplo, si definimos $P_n(z)=(n+1)+nz+(n-1)z^2+..+2z^{n-1}+z^n$, no se verifica que $P_{n+1}(z)=P_n(z)+z^{n+1}$.

♣ *MOMENTO CLAVE: Usted debe leer, releer y meditar sobre el parágrafo que sigue hasta asegurarse de que lo entiende. No es que sea difícil. Es un paso crítico que termina en el próximo trébol.*

Dada una serie de potencias $S=(S_n)_{n=0}^{\infty}$, para cada $z\in\mathbb{C}$ se tiene una serie numérica $S=(S_n(z))_{n=0}^{\infty}$. Tomemos por ejemplo, la serie (1) de la lista de *Ejemplos* 6.1. Para $z=\frac{1}{2}$ se tiene la serie numérica $S=(S_n(\frac{1}{2}))_{n=0}^{\infty}$, es decir: $1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+....$ = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...$; para z = 3, se tiene $1+3+3^2+3^3+....$; para z = i se obtiene la serie $1+i+i^2+i^3+....=1+i-1-i+...$; para $z=\frac{1}{2}-\frac{i}{4}$ se tiene… (imagine). Como ya puede ir sospechando, para algunos complejos z la serie numérica resultante converge y para otros no. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 6.3: Se denomina *dominio de convergencia* de una serie $S=(S_n)_{n=0}^{\infty}$ al conjunto $D_S=\left\{z\in\mathbb{C}:\left(S_n(z)\right)_{n=0}^{\infty}\ \textit{converge}\right\}$.

En los Ejemplos 6.1., usted puede probar como ejercicio (no todos son sencillos, y corresponden a la práctica 4, por lo tanto puede esperar hasta ese momento y creer las respuestas con una fe profunda):

(1) $1+z+z^2+z^3+....$ converge sii $|z|<1$, es decir: su dominio de convergencia es el disco abierto $D_1=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$.

(2) $1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+....$ converge para todo z, es decir: $D_2=\mathbb{C}$

(3) $-z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+....$: el dominio de convergencia de esta serie es un poco más complicado que los anteriores, pero no tanto: $D_3=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}-\{-1\}$.

(4) $1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2^2}z^4+\frac{1}{2^3}z^6+....$: $D_4=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le\sqrt{2}\}$

(5) $1+\frac{1}{2}(z-i)+\frac{1}{3}(z-i)^2+\frac{1}{4}(z-i)^3+....$: $D_5=\{z\in\mathbb{C}:|z-i|<1\}$

(6) $z+2^2z^2+3^3z^3+4^4z^4+....$: Este es muy chiquito: $D_6=\{0\}$

Ahora viene el momento clave del momento clave: Cada serie de potencias $S=(S_n)_{n=0}^{\infty}$ define una función $f:D_S\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que para cada $z\in D_S$ es

$$f(z)\overset{\text{definición}}{=}\underset{n\to\infty}{Lim}S_n(z)=\underset{n\to\infty}{Lim}\sum_{k=0}^{n}c_k(z-z_0)^k\overset{\text{notación}}{=}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3...$$

[Aquí es donde la notación para el límite de las sumas parciales (este límite se denomina *suma* de la serie) se confunde con la notación tradicional para las series de potencias. Es como utilizar la misma notación para una sucesión y para su límite. (Ver ***Nota* 6.1** arriba)]

Veamos las funciones que definen las series de la lista de Ejemplos 6.1:

(1) $1+z+z^2+z^3+....=\dfrac{1}{1-z}$ (siempre y cuando $|z|<1$) Que esta es la función que define la serie se puede ver fácilmente utilizando el truquito de las suma geométricas: para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $z\in\mathbb{C}$ tenemos la siguiente identidad, que usted puede comprobar muy fácilmente: $(1+z+z^2+z_3+...+z^n)(1-z)=1-z^{n+1}$. Ahora, para todo $z\ne 1$: $1+z+z^2+z_3+...+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Si $|z|<1$, $\underset{n\to\infty}{Lim}z^{n+1}=0$ (ejercicio del TP 1) y por lo tanto, si $|z|<1$: $\underset{n\to\infty}{Lim}(1+z+z^2+z_3+...+z^n)=\dfrac{1}{1-z}$, que es exactamente lo afirmado. Este es un caso bastante decepcionante, pues la serie define no solo una función muy conocida, $z\mapsto\dfrac{1}{1-z}$, cuyo dominio es $\mathbb{C}-\{1\}$, sino que la define en un dominio más

restringido. Por otra parte, la serie geométrica es extremadamente útil y aparece con una frecuencia sorprendente en los lugares más insospechados de la matemática.

(2) $1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+....$ converge para todo complejo z y por lo tanto define una función en todo el plano complejo. En la Clase 0 ya fue presentada informalmente y es la maravillosa exponencial. La indicaremos indistintamente *exp*(z) o e^z.

(3) y (5) Para entender estas funciones tenemos que esperar hasta la aparición de las funciones logarítmicas complejas. De todos modos, lo que hay que tener presente es que las series de potencias sirven para definir funciones que de otra manera es imposible. El caso de la exponencial es paradigmático. La serie exponencial no define una función previamente conocida. Es la función exponencial. Un ejemplo que no está en la lista es la función $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^k}$. Esta serie converge para todo complejo z y por lo tanto el dominio de esta función es todo el plano. Si alguien la reconoce, por favor avíseme (o a la policía, directamente). Lo notable es que esto, que a los alumnos de Análisis III puede parecerles novedoso, ocurría también en Análisis I: las definiciones analíticas de la función exponencial y las trigonométricas, por ejemplo, requieren el uso de series de potencias: no existe otra forma de definirlas. Volveremos dentro de poco a este tema.

(4) $1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2^2}z^4+\frac{1}{2^3}z^6+....=\dfrac{1}{1-\dfrac{z^2}{2}}$ (siempre y cuando $|z|<\sqrt{2}$) Se trata de la serie geométrica evaluada en $\dfrac{z^2}{2}$. Un momento de meditación: la identidad

$$1+[]^2+[]^3+[]^4+[]^5+...=\frac{1}{1-[]} \qquad (*G)$$

vale para cualquier quelonio [] que tenga módulo menor que 1. Aquí tampoco tenemos nada nuevo.

(6) $z+2^2z^2+3^3z^3+4^4z^4+....$: El dominio es $D_6=\{0\}$, por lo tanto la función que define esta serie no es muy interesante que digamos….

***Nota* 6.2:** Un caso que no figura en la lista de los *Ejemplos* 6.1 pero que conviene tener presente es el caso en que la sucesión $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ de coeficientes verifica que $c_n=0$ para todo $n > m$ para un cierto natural m. Resulta que para todo $n > m$ y todo z las sumas parciales $S_n(z)$ son iguales a $S_m(z)$. Entonces, para todo z, $\lim_{n\to\infty}S_n(z)=S_m(z)$. Por lo tanto, la función que define esta serie de potencias no es otra cosa que el polinomio $S_m(z)$. De manera más visual:

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_m(z-z_0)^m + \overbrace{c_{m+1}}^{=0}(z-z_0)^{m+1} + \overbrace{c_{m+2}}^{=0}(z-z_0)^{m+2} + \ldots =$$

$$= c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_m(z-z_0)^m = S_m(z)$$

Por lo tanto, las funciones polinómicas son casos particulares de series de potencias.

♣ *FIN DEL MOMENTO CLAVE.* Obviamente, lo que sigue también es importante. No hay que relajarse, como con la cuarentena.

Veamos ahora que los ejemplos de dominios de convergencia de las series de potencias que hemos mencionado no podían ser mucho más variados. El siguiente teorema incluye varios resultados importantísimos, que resumimos en un solo enunciado para que pueda servir como referencia.

Aclaración importante: De este teorema utilizaremos - y mucho - los ítems (*I*) y (*III*). Los otros dos pueden tomarse, por ahora, como extensiones culturales. Por ahora.

TEOREMA 6.1 (*Cauchy-Hadamard*)

Sea $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ una serie de potencias de centro z_0 y sucesión de coeficientes $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, es decir, para cada $z \in \mathbb{C}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima suma parcial es $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-z_0)^k$. Entonces:

(***I***) Su dominio de convergencia D verifica alguna de las siguientes tres propiedades excluyentes:

(a) $D = \{z_0\}$ ó bien

(b) Existe un número real $R > 0$ tal que $D(z_0;R) \subseteq D \subseteq \overline{D}(z_0;R)$, ó bien

(c) $D = \mathbb{C}$.

En el caso (b), el número R se denomina *radio de convergencia* de la serie. En el caso (a) indicaremos $R = 0$ y en el caso (c), la notación es $R = \infty$. [Respecto del cálculo de R, ver Nota 6.3]

(II) Si $R > 0$ (o bien si $R = \infty$), entonces para todo $z \in D(z_0;R)$, (o bien para todo $z \in \mathbb{C}$ si $R = \infty$) la convergencia de la serie es absoluta, es decir: la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k||z - z_0|^k$ es convergente. Y si $|z - z_0| > R$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k||z - z_0|^k$ es divergente. (Aquí hemos utilizado la notación informal y usual para las series). [En el borde del disco, la serie puede ser condicionalmente convergente en algunos puntos, absolutamente convergente en otros o divergentes en algunos otros. En la lista de *Ejemplos* 6.1 se presentan todos estos casos]

(III) Si $R > 0$, o bien si $R = \infty$, sea la función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por la serie de potencias, es decir, la función que para cada $z \in D$ es

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 ... \qquad (III.1)$$

Entonces, esta función es holomorfa en $D(z_0, R) \subseteq D$ (es holomorfa en $\mathbb{C}$ si $R = \infty$) y su derivada, en cada punto $z \in D(z_0;R)$ es

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1} = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + 4c_4(z - z_0)^3 ... \qquad (III.2)$$

En particular esto quiere decir que el radio de convergencia de esta serie es *R*, el mismo que el radio de convergencia de la serie (*III*.1). Esto incluye el caso $R = \infty$, es decir: si (*III*.1) converge para todo $z \in \mathbb{C}$, lo mismo ocurre con la serie (*III*.2).

(***IV***) Si $R > 0$ (o bien si $R = \infty$), Para cada número real *r* tal que $0 < r < R$ (o bien para todo número real $r > 0$, si $R = \infty$), la convergencia de la serie $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ es uniforme en $\overline{D}(z_0;r)$. Es decir: $\lim_{n \to \infty} \|f - S_n\|_{\infty} = 0$, donde

$$\|f - S_n\|_{\infty} = \max\{|f(z) - S_n(z)| : z \in \overline{D}(z_0;r)\}$$

Demostración: Las demostraciones, en general, son consideradas un lujo asiático e inútil por mucha gente. En lo personal, nunca pude escribir en el pizarrón el enunciado de un teorema sin haber entendido su demostración previamente, aunque la omita en clase por falta de tiempo o por estar fuera del alcance del curso. Pero esto no es una virtud (o un defecto) particular: es un vicio común a todos los matemáticos. En el apéndice que lleva el nombre, precisamente, Demostración del Teorema 6.1, puede encontrar una demostración, que puede leerse como para entender las ideas involucradas o bien ir a un buen libro de análisis matemático para encontrar una demostración completa y rigurosa.

En este último caso, seguramente la va a encontrar repartida en dos o tres teoremas. Desde luego, la otra posibilidad es omitir olímpicamente su lectura. ■

Una consecuencia no menor del punto (*IV*) es que la función *f* resulta ser continua, pues el límite uniforme de funciones continuas es continua (otro gran teorema del gran Weierstrass). Pero veremos que las funciones definidas por series de potencias tienen propiedades mucho más fuertes (Corolario 6.1 más adelante)

Para el cálculo del radio de convergencia suelen ser útiles los siguientes criterios:

Criterio de la raíz y criterio del cociente: Sea $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$ una serie de potencias de centro z_0 y sucesión de coeficientes $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, es decir, para cada $z \in \mathbb{C}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ la *n*-ésima suma parcial es $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$. Entonces, si *R* es el radio de convergencia de *S*:

(*A*) Si existe $L = \lim_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(*B*) Si existe $L' = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, entonces también existe $L = \lim_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ y $L' = L$ (y por lo tanto, $R = \frac{1}{L'}$).

Demostración: El interesado puede ver la demostración en el apéndice *Demostración del Teorema* 6.1 ■

Es importante insistir que el radio de convergencia de una serie de potencias siempre existe, aunque no existan los límites (*A*) o (*B*). Pero estos criterios son aplicables a muchas series de potencias que aparecen en la práctica, algunas de ellas muy importantes, por ejemplo:

***Ejemplos* 6.2**:

(1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$, pues su radio de convergencia es ∞, como puede verse fácilmente utilizando el criterio del cociente: $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Entonces, esta serie define una función $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo complejo z es $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Ya la hemos presentado en la Clase 0 con su notación clásica e^z, pero ahora podemos certificar su existencia. El certificado lo extiende el teorema 6.1. Este teorema también permite afirmar que esta función es derivable en todo el plano complejo (es decir es holomorfa en todo el plano) y que su derivada es

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} z^{n} = \exp(z)$$

Es ella misma. ¿Sorprendido?

(2) Las series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ también convergen para todo complejo z (aplicar el criterio del cociente a las series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2n!} w^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+1)!} w^n$ y no olvidarse de tomar los módulos de los coeficientes). Entonces, definen funciones holomorfas $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $sen : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que para todo z: $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}$ y $sen(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. Adivine cómo se llaman. El Teorema 6.1 nos permite calcular sus derivadas derivando término a término las series, y obtenemos

$$\cos'(z) = \left[1 - \tfrac{1}{2!} z^2 + \tfrac{1}{4!} z^4 - \ldots\right]' = -\tfrac{2}{2!} z + \tfrac{4}{4!} z^3 - \tfrac{6}{6!} z^5 + \ldots = -(z - \tfrac{1}{3!} z^3 + \tfrac{1}{5!} z^5 - \ldots) = -sen(z)$$

y

$$sen'(z) = \left[z - \tfrac{1}{3!} z^3 + \tfrac{1}{5!} z^5 - \ldots\right]' = 1 - \tfrac{3}{3!} z^2 + \tfrac{5}{5!} z^4 - \tfrac{7}{7!} z^6 + \ldots = 1 - \tfrac{1}{2!} z^2 + \tfrac{1}{4!} z^4 - \tfrac{1}{6!} z^6 = \cos(z)$$

Algo conocido desde nuestra más tierna infancia, pero ahora para variable compleja.

(3) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \ldots.$ tiene radio de convergencia 1, pues $\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \frac{n}{n+1} = 1$. Por lo tanto define una función $l : D(0;1) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en el disco y cuya derivada es $l'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots. = \frac{1}{1+z}$ (la geométrica está siempre presente en nuestros corazones). Es decir, esta función *l* es una primitiva de $\frac{1}{1+z}$ (*F* es primitiva de *f* si *F' = f* , como en Análisis I). ¿Se anima a bautizar a esta función *l*?

(4) Un ejemplo que tal vez le resulte desconocido es la función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n$, también holomorfa en todo el plano: aquí conviene, obviamente, aplicar el criterio de la raíz:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Si quiere recordar viejos tiempos, puede intentar estudiar la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}x^n = x + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^3}x^3 + ...$ que ya está dada por su desarrollo de Taylor centrado en 0 (o sea: Maclaurin…)

Usted puede divertirse inventando funciones holomorfas a partir de series de potencias con radios de convergencia no nulos. Más adelante volveremos sobre esto.

COROLARIO 6.1 (*Fórmulas de Taylor*)

Sea $f : D(z_0; R) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, f es indefinidamente derivable (es decir: es de clase C^∞) en el disco abierto $D(z_0; R)$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (*T)$$

(Las igualdades (*T) se denominan fórmulas de Taylor).

Demostración: Por el Teorema 6.1, sabemos que f es derivable en $D(z_0; R)$ y que para todo $z \in D(z_0; R)$ es $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z - z_0)^{n-1}$, <u>con el mismo radio de convergencia</u> R. Pero entonces, se puede volver a aplicar el Teorema 6.1 a la función derivada $f' : D(z_0; R) \longrightarrow \mathbb{C}$, y resulta $f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n (z - z_0)^{n-2}$, <u>con el mismo radio de convergencia</u> R. Ya podemos imaginar cómo sigue el razonamiento. Respecto de las fórmulas (*T), se deducen de las siguientes cuentitas:

$$\forall z \in D(z_0; R) : f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + ...$$
$$\Rightarrow f(z_0) = c_0$$

$$\forall z \in D(z_0; R) : f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + 4c_4(z - z_0)^3 + ...$$
$$\Rightarrow f'(z_0) = c_1$$

$$\forall z \in D(z_0; R) : f''(z) = 2c_2 + 3 \times 2c_3(z - z_0) + 4 \times 3c_4(z - z_0)^2 + 5 \times 4c_5(z - z_0)^3 + ...$$
$$\Rightarrow f''(z_0) = 2c_2$$

$\forall z \in D(z_0;R): f'''(z) = 3\times 2c_3 + 4\times 3\times 2c_4(z-z_0) + 5\times 4\times 3c_5(z-z_0)^2 + ...$
$\Rightarrow f'''(z_0) = 3\times 2c_3$

Una más para confirmar la intuición:

$\forall z \in D(z_0;R): f^{(4)}(z) = 4\times 3\times 2c_4 + 5\times 4\times 3\times 2c_5(z-z_0) + 6\times 5\times 4\times 3c_6(z-z_0)^2 + ...$
$\Rightarrow f^{(4)}(z_0) = 4\times 3\times 2c_3$

Es decir: claramente lo que se obtiene es $f^{(n)}(z_0) = n!c_n$ para todo *n*, es decir: las fórmulas (**T*). Aquí es donde algunos matemáticos (no todos) exigirían una prueba formal, mediante lo que se denomina *inducción completa*. Pero en este caso sería un ejercicio elemental para un estudiante de una licenciatura en matemática o de matemática discreta y no nos aportaría mayor claridad para entender que estas fórmulas son correctas. ■

COROLARIO 6.2: (*Unicidad de los coeficientes de una serie de potencias*)
Supongamos que S_1 y S_2 son dos series de potencias de mismo centro z_0 y radios de convergencia $R_1 \geq R_2 > 0$, y coeficientes $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la primera y coeficientes $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ la segunda. Finalmente, supongamos que para todo $z \in D(z_0;R_2)$ se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N} : a_n = b_n$.

Demostración: Ambas series definen la misma función $f : D(z_0;R_2) \longrightarrow \mathbb{C}$, es decir: para todo $z \in D(z_0;R_2)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$. Pero entonces, por el corolario anterior, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = b_n$ para todo *n*. ■

La idea de este corolario es que así como una serie de potencias determina una función, esta función, a su vez determina los coeficientes de la serie. Dos series de potencias centradas en el mismo z_0 definen la misma función si y solamente si tienen los mismos coeficientes.

Llegó el momento de bautizar a las funciones definidas por series de potencias.

DEFINICIÓN 6.4: Dado un abierto no vacío $D \subseteq \mathbb{C}$, una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es *analítica en D* sii para todo $z_0 \in D$ existe $r > 0$ y existe una serie de potencias de centro

z_0, radio de convergencia $R > r$ y sucesión de coeficientes $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ tales que $D(z_0,r) \subseteq D$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{n} c_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0,r)$. En particular, una función analítica $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por una serie de potencias con radio de convergencia infinito, se denomina *entera*.

Es decir: una función es analítica cuando está definida por una serie de potencias en torno de cada punto de su dominio. En particular, las funciones analíticas son de clase C^{∞} . El concepto de función analítica vale, desde luego, para funciones reales de variable real. En el caso de variable real existen funciones de clase C^{∞} que no son analíticas. Los primeros ejemplos conocidos son de Cauchy. Pero en el caso de variable compleja esto no ocurre, como veremos más adelante. Como ejemplos importantes de funciones analíticas tenemos, por ahora, las funciones polinómicas, la exponencial y las trigonométricas (Ejemplos 6.2). Estas funciones están definidas por series con radio de convergencia infinito y por lo tanto son ejemplos de funciones enteras.

Veamos ahora cómo se puede operar con funciones analíticas.

COROLARIO 6.3: (*Operaciones aritméticas con series de potencias*)

Sean $f : D(z_0,R_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : D(z_0,R_2) \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones definidas por series de potencias de radios de convergencia $R_1 \geq R_2 > 0$, digamos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0;R_1)$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0;R_2) \subseteq D(z_0;R_1)$. Entonces, para todo $z \in D(z_0;R_2)$ y cualquier constante compleja λ:

(1) $(f+g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$

(2) $\lambda g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda b_n (z - z_0)^n$

(3) $$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n)(z - z_0)^n =$$
$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_1 b_0)(z - z_0) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1)(z - z_0)^2 + ...$$

Además, los radios de convergencia de las series de los segundos miembros son $\geq R_2$.

Demostración: La demostración la puede encontrar en cualquier libro decente de análisis de variable compleja. No la va a encontrar en los apéndices de este capítulo por la sencilla razón de que no la escribí. Tal vez, más adelante, con más tiempo. Por otra parte, según mi experiencia, nadie entiende la demostración de una propiedad que le resulta evidente. El problema es que estas propiedades parecen evidentes pero no lo son. La clave de porqué son válidas estas fórmulas está en la convergencia absoluta de las series involucradas. Lo único que voy a exhibir, y de manera extremadamente informal, es la razón por la que aparecen los coeficientes algo extravagantes en el producto de las series. Para reducir la escritura, pongamos $w = z - z_0$. Entonces, aplicando la distributividad del producto respecto de la suma de manera irresponsable (son sumas infinitas…):

$$
\begin{aligned}
&(a_0 + a_1w + a_2w^2 + a_3w^3 + a_4w^4 + ...)(b_0 + b_1w + b_2w^2 + b_3w^3 + b_4w^4 + ...) = \\
&= a_0b_0 + a_0b_1w + a_0b_2w^2 + a_0b_3w^3 + a_0b_4w^4 + ... \\
&\qquad + a_1b_0w + a_1b_1w^2 + a_1b_2w^3 + a_1b_3w^4 + ... \\
&\qquad\qquad + a_2b_0w^2 + a_2b_1w^3 + a_2b_2w^4 + ... \\
&\qquad\qquad\qquad + a_3b_1w^4 + ...
\end{aligned}
$$

Ahora, agrupando los términos por potencias de *w*, se obtiene la expresión buscada. ■

***Ejemplos* 6.3**: Con este corolario podemos calcular la parte real y la parte imaginaria de algunas funciones muy importantes. En la Clase 0 probamos informalmente que para todo par de complejos *z* y *w*: $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$. La cuenta que hicimos puede legitimarse mediante argumentos parecidos a los de la demostración (pendiente, por lo que debo pedir disculpas) del Corolario 6.3. Entonces, recordemos la cuenta: para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + ie^x sen(y) .$$

Nuevamente, la maravillosa fórmula de Euler, que ahora podemos extender de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= 1 + iz + \tfrac{1}{2!}i^2z^2 + \tfrac{1}{3!}i^3z^3 + \tfrac{1}{4!}i^4z^4 + ... = \\
&= 1 - \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{4!}z^4 - \tfrac{1}{6!}z^6 + ... + i(z - \tfrac{1}{3!}z^3 + \tfrac{1}{5!}z^5 - \tfrac{1}{7!}z^7 + ...) = \cos(z) + isen(z)
\end{aligned}
$$

La fórmula de Euler se extiende… De la misma manera,

$$
\begin{aligned}
e^{-iz} &= 1 - iz + \tfrac{1}{2!}i^2z^2 - \tfrac{1}{3!}i^3z^3 + \tfrac{1}{4!}i^4z^4 + ... = \\
&= 1 - \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{4!}z^4 - \tfrac{1}{6!}z^6 + ... - i(z - \tfrac{1}{3!}z^3 + \tfrac{1}{5!}z^5 - \tfrac{1}{7!}z^7 + ...) = \cos(z) - isen(z)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos(z)$ y $e^{iz} - e^{-iz} = 2isen(z)$. Entonces,

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad , \qquad sen(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Esto permite calcular, rápidamente, las componentes real e imaginaria de las trigonométricas:

$$\cos(x+iy)=\frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}=\frac{1}{2}\left[e^{-y+ix}+e^{y-ix}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos(x)+isen(x))+e^{y}(\cos(x)-isen(x))\right]=$$
$$=\cos(x)\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-isen(x)\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\cos(x)ch(y)-isen(x)sh(y)$$

$$sen(x+iy)=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[e^{-y+ix}-e^{y-ix}\right]=$$
$$=\frac{-i}{2}\left[e^{-y}(\cos(x)+isen(x))-e^{y}(\cos(x)-isen(x))\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^{-y}(-i\cos(x)+sen(x))+e^{y}(i\cos(x)+sen(x))\right]$$
$$=sen(x)\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+i\cos(x)\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=sen(x)ch(y)+i\cos(x)sh(y)$$

Dejamos por ahora los ejemplos. En las guías de trabajos prácticos hay más ejemplos.

Terminamos este capítulo con un par de observaciones complementarias.

***Observación* 6.1:** El dominio de convergencia de una serie de potencias es un punto, o el plano complejo entero o bien está incluido entre un disco abierto y su adherencia. No hay más posibilidades. Otro tipo de series de funciones pueden tener otro tipo de dominio de convergencia, algunos de ellos extremadamente complicados. Un ejemplo muy sencillo de dominio de convergencia que no puede ser el dominio de convergencia de una serie de potencias es, por ejemplo, es el de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$ (notación peligrosa…) Para determinar el conjunto de los complejos z para los cuales la serie converge, basta ver que se trata de una geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-z})^{n}=\frac{1}{1-e^{-z}}$, convergencia e igualdad que vale sii $\left|e^{-z}\right|<1$, es decir sii $e^{-\mathrm{Re}(z)}<1$. Por lo tanto, el dominio de convergencia de la serie es el semiplano $\{x+iy\in \mathbb{C} : x>0\}$.

***Observación* 6.2:** La posibilidad de derivar término a término una serie de potencias es una propiedad muy excepcional de este tipo de series, tanto de variable real como de variable compleja. Un ejemplo muy sencillito (de variable real) donde esto no ocurre es, por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n^2x)}{n^2}$. Esta serie converge absolutamente para todo x, como puede verse fácilmente mediante la acotación $\sum_{n=1}^{m} \left|\frac{sen(n^2x)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$ de las sumas parciales de los valores absolutos y teniendo presente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (criterio de la integral). Pero derivando término a término se obtiene la espantosa serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2x)$.

Ha sido un largo capítulo. Quedan muchas cuestiones pendientes, algunas importantes, otras hermosas y otras con las dos virtudes. Quedarán para un próximo encuentro.

APÉNDICE DEL CAPÍTULO VI: DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.1

La notación que utilizaremos para las series de potencias en estas demostraciones es, por comodidad, la inusual (y menos peligrosa que la habitual) $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[\ ]^n$. También, por comodidad consideraremos a estas series centradas en 0. El caso general se deduce mediante una sencilla traslación. Precisamente, la idea de esta notación es que en el lugar [ ] se puede poner *z*, o bien $z - z_0$, o bien *w* o bien cualquier otro marsupial complejo.

LEMA: Dada una serie de potencias $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[\ ]^n$, supongamos que existe un complejo $w \neq 0$ tal que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ converge. Entonces, para todo complejo *z* tal que $|z| < |w|$, la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolutamente. Más aún: para cada real ρ tal que $0 < \rho < |w|$ la serie converge uniformemente en el disco $\overline{D(0,\rho)}$.

Demostración: Por ser $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ convergente, $\underset{n \to \infty}{Lim}\, c_n w^n = 0$. Entonces, existe una constante real $M > 0$ tal que $|c_n||w|^n \le M$ para todo natural *n*. Entonces, para todo natural *n* se tiene que $|c_n||z|^n = |c_n|\frac{|z|^n}{|w|^n}|w|^n = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)^n |c_n||w|^n = r^n |c_n||w|^n \le r^n M$, donde $r = \frac{|z|}{|w|} < 1$ por hipótesis. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ converge, pues la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n M = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge. Ahora, si $0 < \rho < |w|$, se tiene, para todo $z \in \overline{D(0,\rho)}$:

$$|c_n||z|^n = |c_n|\frac{|z|^n}{|w|^n}|w|^n = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)^n |c_n||w|^n \le \left(\frac{\rho}{|w|}\right)^n |c_n||w|^n \le \left(\frac{\rho}{|w|}\right)^n M \text{ ,}$$

Como $\frac{\rho}{|w|} < 1$, esto implica la convergencia uniforme (*criterio M de Weierstrass*) de la serie en $\overline{D(0,\rho)}$ ■

COROLARIO: Dada una serie de potencias $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [\ ]^n$, el conjunto

$$J_S = \left\{ r \ge 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \textit{ converge } \forall z \in \overline{D(0,r)} \right\}$$

es no vacío. Más aún: es un intervalo de la forma $\{0\}$, $[0,R)$ para algún $R > 0$, $[0,R]$ para algún $R > 0$, o bien $[0,+\infty)$.

P/ Que es no vacío es evidente, pues $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0$ es convergente. Es decir: siempre $0 \in J_S$ y por definición $J_S \subseteq [0,+\infty)$. Ahora, si $J_S \ne \{0\}$, sea $r > 0$ en J_S. Entonces, por definición la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ converge para todo $w \in \overline{D(0,r)}$, en particular esto vale si *w* = *r*, es decir, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ converge. Ahora, dado $\rho \in [0,r)$ por el lema previo, para todo complejo *z* de módulo $|z| = \rho$ sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge (y que la convergencia es absoluta). Por lo tanto, $\rho \in J_S$. Hemos probado que para todo $r \in J_S$ se verifica que $[0,r) \subseteq J_S$. Pero esta propiedad es característica de los intervalos, lo que completa la demostración (ya vimos que $0 \in J_S$ y que por definición $J_S \subseteq [0,+\infty)$, por lo tanto basta considerar los casos en que el intervalo J_S es acotado o no, abierto o no) ■

DEFINICIÓN: El *radio de convergencia* de una serie de potencias $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[\ ]^n$ es el elemento $R \in [0,+\infty]$ de la semirrecta real ampliada definido de la siguiente manera: si $J_S = \{0\}$, definimos $R = 0$; si $J_S = [0,R)$ o $J_S = [0,R]$ para algún R, éste R se define como radio de convergencia de la serie; si $J_S = [0,\infty)$, definimos $R = +\infty$.

TEOREMA 1: El dominio de convergencia D_S de una serie de potencias $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[\ ]^n$ con radio de convergencia R verifica una de las tres condiciones:

(a) $D_S = \{0\}$ (si $R = 0$)

(b) $D(0,R) \subseteq D_S \subseteq \overline{D(0,R)}$ (si $0 < R < +\infty$)

(c) $D_S = \mathbb{C}$ (si $R = +\infty$)

Además, en el caso (b), la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolutamente para todo $z \in D(0,R)$, y en el caso (c) lo mismo ocurre para todo $z \in \mathbb{C}$. Por último y no menos importante, para todo real ρ tal que $0 < \rho < R$ (solamente puede existir en los caso (b) y (c)), la serie converge uniformemente en el disco $\overline{D(0,\rho)}$.

Demostración: Ya fue demostrado todo lo necesario previamente. Respecto de la convergencia uniforme en cada disco cerrado $\overline{D(0,\rho)} \subset D(0,R)$, ver al final del Lema (es una aplicación directa del *criterio M de Weierstrass*) ■

TEOREMA 2: Dada una serie de potencias $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[]^n$ con radio de convergencia R, el radio de convergencia de $S = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n[]^{n-1}$ también es R.

Demostración: Demostraremos primero que para todo $z \in D(0,R)$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ converge absolutamente. Si $z = 0$ esto es trivial, por lo tanto consideraremos el caso en que z es no nulo. Sea $\rho \in \Re$ tal que $|z| < \rho < R$ y sea $r = \frac{|z|}{\rho}$. Por las elecciones realizadas, tenemos que $0 < r < 1$, y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ converge:

[Criterio del cociente: $\frac{(n+1)r^n}{nr^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)r \xrightarrow[n\to\infty]{} r < 1$]

Esto implica que la sucesión $\left(nr^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ es acotada (pues converge a 0). Sea $M > 0$ tal que $nr^{n-1} < M$ para todo $n \geq 1$. Entonces, para todo $n \geq 1$:

$$n|c_n||z|^{n-1} = \frac{n}{\rho}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n-1}|c_n\rho^n| = \frac{nr^{n-1}}{\rho}|c_n\rho^n| \leq \frac{M}{\rho}|c_n\rho^n| \qquad (*)$$

Pero $0 < \rho < R$, es decir: $\rho \in D(0,R)$ y $|\rho| = \rho$, por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\rho^n$ converge (Teorema 1). Entonces, de (*) se deduce, por comparación, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n||z|^{n-1}$ converge.

Resta ver que si $|z| > R$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ diverge. Pero si $|z| > R$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ diverge, por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ diverge:

[*prueba*: por el criterio de Dirichlet-Abel, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\alpha_n$ también. Por lo tanto, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} = \frac{1}{|z|}\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{nc_n z^n}^{\alpha_n}$ fuera convergente, también lo sería la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{c_n z^n}^{\frac{1}{n}\alpha_n}$] ■

TEOREMA 3: Dada una serie de potencias $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[\,]^n$ con radio de convergencia $R >$ 0, sean $f : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ las funciones definidas por

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \qquad \text{y} \qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n z^{n-1}$$

[Hemos visto en el teorema anterior que ambas series tienen el mismo radio de convergencia] . Entonces, *f* es derivable en todo el disco $D(0, R)$ y su derivada es *g*.

Demostración: Veamos cómo podemos comenzar: dados dos puntos distintos z_0 y z en $D(0, R)$:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_n z_0^{\,n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}-nz_0^{n-1}\right)$$

(el primer término de $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$ es nulo). Ahora, una cuentita sencillita:

$$(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+z^{n-3}z_0^2+\ldots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1})(z-z_0)=z^n-z_0^n$$

Por lo tanto, como $z-z_0\neq 0$:

$$\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=z^{n-1}+z^{n-2}z_0+z^{n-3}z_0^2+\ldots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}$$

Reemplazando:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+z^{n-3}z_0^2+\ldots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}-nz_0^{n-1}\right)$$

Con la notación $u_n(z,z_0)=c_n(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+z^{n-3}z_0^2+\ldots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}-nz_0^{n-1})$:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z,z_0)$$

Ahora, si $|z|<r<R$ y $|z_0|<r<R$, resulta $|u(z,z_0)|<|c_n|2nr^{n-1}$ para todo $n\geq 1$. Por otra parte, como $|z_0|<r<R$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|r^{n-1}$ es convergente, pues el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}nc_n[\,]^{n-1}$ es *R*. Entonces, dado $\varepsilon>0$ existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty}|u_n(z,z_0)|\leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty}n|c_n|r^{n-1}<\frac{\varepsilon}{2}$$

Por otra parte, $u_n(z_0, z_0) = c_n(z_0^{\,n-1} + z_0^{\,n-2} z_0 + z_0^{\,n-3} z_0^2 + \ldots + z_0 z_0^{n-2} + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}) = 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces, la función $U_{N_\varepsilon}(z, z_0) = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} u(z, z_0)$ es continua y verifica $U_{N_\varepsilon}(z_0, z_0) = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} u(z_0, z_0) = 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} u(z, z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, si $0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon$ (y además $|z| < r < R$ y $|z_0| < r < R$),

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, z_0)\right| \leq \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |u_n(z, z_0)| + \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n(z, z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Hemos demostrado que $\underset{z \to z_0}{Lim} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$ ■

Resultados complementarios:

TEOREMA 4 (Hadamard): El radio de convergencia de $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[\;]^n$ es

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Demostración: ■ La definición de *límite superior* puede buscarse en un buen libro de análisis matemático de una variable real. No es un concepto sencillo y solamente mencionaremos aquí que si la sucesión $(|c_n|^{\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente el límite superior $\limsup_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ existe y es un número real (no negativo, obviamente); si ese límite es nulo, estamos en el caso de radio de convergencia $R = +\infty$. Si esta sucesión no es acotada, el límite superior es $+\infty$ y estamos en el caso R = 0. Por otra parte, si existe $\lim_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ (límite a secas, como el que se estudia en Análisis I), este límite coincide con $\limsup_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto, el teorema de Hadamard puede verse como una generalización del criterio de la raíz que enunciamos a continuación. La importancia del teorema de Hadamard está dada, precisamente, por el hecho de que el límite superior siempre existe. Además de la definición y propiedades de los límites superiores (e inferiores), una demostración del teorema de Hadamard puede verse en un buen libro de análisis, como por ejemplo *Funciones de Variable Compleja*, de César A. Tejo (Harper & Row Latinoamericana - 1974) o en los buenos textos disponibles digitalmente, como por ejemplo:https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m125a/intro_analysis_ch6.pdf, pág. 76. (es de la Universidad de California)

Nota* 1*: Lo que sí puede verse fácilmente es que si la sucesión $(|c_n|^{\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty}$ no es acotada superiormente entonces la serie $S=\sum_{k=0}^{\infty} c_k[\,]^k$ solamente converge para z =0 (es decir: el radio de convergencia es R = 0). Veamos: recordemos que una condición necesaria (no suficiente) para la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ es que el término general tienda a cero, es decir que $\underset{n\to\infty}{Lim}|c_n||z|^n=0$. Pero esto implica que la sucesión $(|c_n||z|^n)_{n=0}^{\infty}$ sea acotada, es decir, que exista alguna constante real positiva K tal que $|c_n||z|^n \leq K$ para todo n, y por lo tanto también es $|c_n||z|^n \leq K+1$ para todo n. Pero entonces, para todo n: $|c_n|^{\frac{1}{n}}|z| \leq (K+1)^{\frac{1}{n}} \leq K$ (pues K + 1 > 1). Entonces, si $z \neq 0$ resulta que $|c_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{K+1}{|z|}$ para todo n. Conclusión: si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ converge para algún $z \neq 0$, entonces la sucesión $\left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ es acotada (superiormente, obvio: 0 es cota inferior…). Esto permite afirmar que si la sucesión $\left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ no es acotada superiormente, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z-^k$ converge solamente si z = 0.

Corolario: (*Criterio de la raíz y criterio del cociente*): Dada la serie $S=\sum_{n=0}^{\infty} c_n[\,]^n$ con radio de convergencia R:

(A) Si existe $L{=}\underset{n\to\infty}{Lim}|c_n|^{\frac{1}{n}}$, entonces $R=\frac{1}{L}$

(B) Si existe $L'{=}\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, entonces también existe $L{=}\underset{n\to\infty}{Lim}|c_n|^{\frac{1}{n}}$ y $L'=L$ (y por lo tanto, $R=\frac{1}{L'}$).

Demostración de (A): Es una consecuencia inmediata del Teorema de Hadamard, pero puede demostrarse directamente sin utilizar este teorema. Es lo que haremos, dado que no hemos dado su demostración.

♠ *Repaso del criterio de la raíz*: Se trata de un criterio de convergencia para series de términos positivos, y que por lo tanto se puede utilizar para detectar convergencia absoluta de una serie cualquiera. Utilizaremos la notación habitual y peligrosa para las series. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos, es decir: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ y supongamos que existe $l = \underset{n \to \infty}{Lim}\, a_n^{\frac{1}{n}}$. Es claro que este límite no puede ser negativo. Entonces, el criterio afirma que: (i) si $l < 1$, entonces la serie converge y (ii) si $l > 1$ la serie diverge. Si este límite es exactamente igual a 1, no se puede inferir ni convergencia ni divergencia. Por ejemplo, si $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\underset{n \to \infty}{Lim}\, a_n^{\frac{1}{n}} = 1$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge; y si $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $\underset{n \to \infty}{Lim}\, a_n^{\frac{1}{n}} = 1$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Como estoy en cuarentena y tengo nostalgia, tiempo y ganas de hacerlo, voy a recordar la demostración de (i) y (ii). Usted siempre tiene el recurso de pasar al parágrafo siguiente.

Prueba de (i) y (ii): la existencia de $l = \underset{n \to \infty}{Lim}\, a_n^{\frac{1}{n}}$ significa, por definición de límite, que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\left| a_n^{\frac{1}{n}} - l \right| < \varepsilon$ para todo $n > n_\varepsilon$, es decir: $n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; l - \varepsilon < a_n^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon$. Si $l < 1$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $l + \varepsilon < 1$, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-l)$. Por otra parte, sabemos que l no puede ser negativo, por ser el límite de una sucesión de números no negativos. Entonces, para el ε elegido resulta que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (l+\varepsilon)^n$ converge. Por otra parte,

$$n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; a_n^{\frac{1}{n}} < l + \varepsilon \;\Rightarrow\; a_n < (l+\varepsilon)^n$$

y por lo tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (criterio de la mayorante). Otra forma de verlo, sin utilizar el criterio de la mayorante es recordar que una sucesión de números reales creciente y acotada superiormente es convergente, que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ forman una sucesión creciente y que por lo probado recién esa sucesión es acotada, pues (sintéticamente):

$$n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; a_n < (l+\varepsilon)^n \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{n} a_k = \overbrace{\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k}^{c} + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} a_k \leq c + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} a_k \leq c + \sum_{k=0}^{\infty} (l+\varepsilon)^k$$

Finalmente, veamos qué pasa si $l > 1$. En este caso, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $l - \varepsilon > 1$, por ejemplo $\varepsilon = \frac{1}{2}(l-1)$. Entonces, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(l-\varepsilon)^n$ diverge y de las implicaciones

$$n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n^{\frac{1}{n}} > l - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n > (l-\varepsilon)^n$$

se deduce que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, por tener una minorante divergente (otra forma: las sumas parciales no están acotadas).

♠ *Fin del repaso del criterio de la raíz.*

Ahora, (A) se deduce del criterio de la raíz aplicado a $a_n = |c_n||z|^n$

Demostración de (B): Es un ejercicio de comparación con una serie geométrica. Demostración esquemática: Abreviamos $\alpha_n = |c_n|$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $L' + \varepsilon < 1$ (existe pues por hipótesis es $L' < 1$; por ejemplo, $\varepsilon = \dfrac{1-L'}{2}$). Entonces, también por hipótesis, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - L'\right| < \varepsilon$. En particular, se tiene (para $n \geq n_0$) $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < L' + \varepsilon$ y entonces, dado que todos los términos de la serie son positivos, se obtienen las desigualdades

$$(L'-\varepsilon)\alpha_{n_0} < \alpha_{n_0+1} < (L'+\varepsilon)\alpha_0 \,,$$

$$(L'-\varepsilon)^2\alpha_{n_0} < (L'-\varepsilon)\alpha_{n_0+1} < \alpha_{n_0+2} < (L'+\varepsilon)\alpha_{n_0+1} < (L'+\varepsilon)^2\alpha_{n_0} \,,$$

$$(L'-\varepsilon)^3\alpha_{n_0} < (L'-\varepsilon)^2\alpha_{n_0+1} < (L'-\varepsilon)\alpha_{n_0+2} < \alpha_{n_0+3} < (L'+\varepsilon)\alpha_{n_0+2} < (L'+\varepsilon)^3\alpha_{n_0} \,,\ldots,$$

$$(L'-\varepsilon)^k\alpha_{n_0} < \ldots < \alpha_{n_0+k} < \ldots < (L'+\varepsilon)^k\alpha_{n_0} \,,\ \ldots$$

…

Por lo tanto $(L'-\varepsilon)\alpha_{n_0}^{\frac{1}{k}} < (\alpha_{n_0+k})^{\frac{1}{n_0+k}} < (L'+\varepsilon)\alpha_{n_0}^{\frac{1}{k}}$. Completar la demostración con cuidado. La idea es que $\alpha_{n_0}^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, pues $\alpha_{n_0} > 0$ (lo pusimos en un denominador…: para aplicar el criterio del cociente tal como está enunciado, los coeficientes de la serie deben ser no nulos) ■

Nota 2: *Un ejemplo donde existe* $\underset{n\to\infty}{Lm} a_n^{\frac{1}{n}}$ *y no existe* $\underset{n\to\infty}{Lm} \frac{a_{n+1}}{a_n}$:

Sea c un número real positivo cualquiera. Entonces, la sucesión periódica

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (c, 2c, 3c, c, 2c, 3c, c, 2c, 3c, \mathrm{c}, \mathrm{2c}, \mathrm{3c}, \ldots)$$

verifica:

$$\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 2, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 2, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$$

y por lo tanto no existe $\underset{n\to\infty}{Lm} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Por otra parte:

$$\left(\alpha_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(c, (2c)^{\frac{1}{2}}, (3c)^{\frac{1}{3}}, (c)^{\frac{1}{4}}, (2c)^{\frac{1}{5}}, (3c)^{\frac{1}{6}}, (c)^{\frac{1}{7}}, \ldots\right)$$

y por lo tanto, existe $\underset{n\to\infty}{Lm} a_n^{\frac{1}{n}}$ y es =1: basta con mirar la sucesión de los logaritmos:

$$\left(\log(\alpha_n^{\frac{1}{n}})\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\log(c), \tfrac{1}{2}\log(2c), \tfrac{1}{3}\log(3c), \tfrac{1}{4}\log(c), \tfrac{1}{5}\log(2c), \tfrac{1}{6}\log(3c), \tfrac{1}{7}\log(c), \ldots\right)$$

que claramente tiende a 0.